定积分习题课

一、内容与要求

二、典型例题

一、内容与要求

1．理解定积分的概念、几何意义、性质。

2．理解变限积分函数的概念，熟练掌握牛顿——莱布尼兹公式

3 . 熟练掌握定积分的换元与分部积分法

4．熟悉如下的一些结论：（均假设$f(x)$连续）

(1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

(2) 设$f(x)$是以T为周期的函数，则：

对任何实数 a ，有 $$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

(3) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为大于1的正奇数}\end{cases}$$

5 .熟练掌握两类反常积分的定义和计算

二、典型例题

1. 利用定积分的定义、几何意义、性质.

例1　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})^2=\int_0^1\ln(1+x)^2dx$

$$=2\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$$

思考：如何计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ ？

$$=e^{2\ln 2-1}$$

注：$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$

例2　设$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx$, 求$f(x)$。

解：令$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=c$　　则$f(x)=x-c$

$$c=\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=\int_0^{\pi}(x-c)\sin x dx$$

$$=\int_0^{\pi} x\sin x dx-c\int_0^{\pi}\sin x dx$$

$c=\pi-2c$　$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=\dfrac{\pi}{3}$　则$f(x)=x-\dfrac{\pi}{3}$

例3　设$f(x)$二阶可导，且$f(x)>0$, 下列不等式

$$f(b)(b-a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

成立的条件是$\underline{\quad B \quad}$

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0.$　　(B) $f'(x)<0, f''(x)>0.$

(C) $f'(x)>0, f''(x)>0.$　　(D) $f'(x)>0, f''(x)<0.$

2. 变限积分函数及其应用

(一).求变限积分函数的导数

例1 设$f(x)$为连续函数，则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ $\underline{xf(x^2)}$

解 $\int_0^x tf(x^2-t^2)dt \xlongequal{x^2-t^2=u} \int_{x^2}^0 tf(u)(-\frac{du}{2t})$

$=\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)du$

(二).与变限积分有关的极限问题

含有变限积分函数的$\frac{0}{0}$型极限采用洛必达法则

例2 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{1}=2$$

(三).求分段函数的变限积分

例3 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ \dfrac{1}{2}(1-x), & -1\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$ 求$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

解：当$x<-1$

$$F(x)=\int_0^{-1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_{-1}^{x}1dt \ =x+\frac{1}{4}$$

当$-1\le x<1$

$$F(x)=\int_0^{x}\frac{1}{2}(1-t)dt=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$$

当$x>1$

$$F(x)=\int_0^{1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_1^{x}(t-1)dt=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4}$$

(四).讨论变限积分函数的性质

例4 (1)若$f(x)$连续，则下列函数中必为偶函数的是 $\underline{\ D\ }$

$(A)\int_0^x f(t^2)dt$　　　　$(B)\int_0^x f^2(t)dt$

$(C)\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　　　$(D)\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

解: 若$f(x)$为奇函数，则$F(x)=\int_0^x f(t)dt$为偶函数

若$f(x)$为偶函数，则$F(x)=\int_0^x f(t)dt$为奇函数

$t[f(t)+f(-t)]$为奇函数，应选D

或令$f(t)=t$，则A,B,C都不对.

例5．设$f(x)$处处连续，$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$

求证:（1）若$f(x)$是偶函数，则$F(x)$也是偶函数;

（2）若$f(x)$单调减少，则$F(x)$单调增加;

证明:（1）$F(x)=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$

$$F(-x)=-x\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^{-x} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{t=-u}{=\!=\!=}x\int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}u-2\int_0^x uf(-u)\,\mathrm{d}u$$

$$=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-2\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u=F(x)$$

(2) $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$

$$=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)\ -2xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)$$ (由积分中值定理)

$=[f(\xi)-f(x)]x$　ξ介于0，x之间。

$f(x)$单调减少 则当$x<0$时，$x<\xi<0$，$f(\xi)<f(x)$

于是有$F'(x)=[f(\xi)-f(x)]\cdot x>0$

当$x>0$时，$0<\xi<x$，则$f(\xi)>f(x)$

此时也有$F'(x)=[f(\xi)-f(x)]\cdot x>0$

所以$F(x)$为单调增函数。

例6. 求多项式 $f(x)$ 使它满足方程

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t+\int_0^x f(t-1)\,\mathrm{d}t=x^3+2x$$

解: 令 $u=xt$, 则 $\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{x} f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

代入原方程得 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+x\int_{-1}^{x-1} f(u)\,\mathrm{d}u=x^4+2x^2$

两边求导: $f(x)+\int_{-1}^{x-1} f(u)\,\mathrm{d}u+x f(x-1)=4x^3+4x$

再求导: $f'(x)+2f(x-1)+x f'(x-1)=12x^2+4$ ①

可见 $f(x)$ 应为二次多项式, 设 $f(x)=ax^2+bx+c$

代入① 式比较同次幂系数, 得 $a=3, b=4, c=1.$

故 $f(x)=3x^2+4x+1$

例7. 求$f(x)=\int_0^1|t-x|\mathrm{d}t$在$[0,1]$上的最大值和最小值。

解： $f(x)=\int_0^1|t-x|\,\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\mathrm{d}t$

$$=[-\frac{1}{2}(x-t)^2]_0^x+[\frac{1}{2}(t-x)^2]_x^1$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2+-x+\frac{1}{2}=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$$

因此$x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$取得最小值$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，

而$x=0$或$x=1$时，$f(x)$取得最大值$f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$。

例8. 证明恒等式

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

证: 令 $f(x) = \underline{\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t} + \underline{\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}$

则 $f'(x) = 2x\sin x\cos x - 2x\sin x\cos x = 0$

因此 $f(x) = C \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 又

$$f(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t}\,)\mathrm{d}\,t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

故所证等式成立。

3. 有关定积分、反常积分的计算

(一). 选择适当的方法计算(变形、换元、分部)

例1:　计算下列积分

$$(1)\int_0^{\pi} x^2\sin^2 x\,dx \qquad (2).\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3).\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \qquad (4)\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$$

3. 有关定积分、反常积分的计算

(一). 选择适当的方法计算(变形、换元、分部)

例1：　计算下列积分

$$(1)\int_0^{\pi} x^2\sin^2 x dx = \frac{1}{2}[\int_0^{\pi} x^2 dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx]$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x^2 d\sin 2x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}[x^2 \sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\sin 2x dx]$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x d\cos 2x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$$

$$(2).\ \int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}} \qquad 令 x=\sin t$$

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt = \frac{\pi}{4}\ (令 t=\frac{\pi}{2}-u)$$

$$(3).\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \ \underline{\underline{x=\tan t}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

注：也可令倒代换

$$(4)\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^{2}}dx \quad =-\int_{1}^{+\infty}\ln x d\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_{1}^{+\infty}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$$

$$=(-\frac{\ln x}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x})\Big|_{1}^{+\infty}=\ln 2$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$$

例2. 求$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令$e^{-x}=\sin t$, 则$x=-\ln\sin t$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$,

当$x=0$时, $t=\dfrac{\pi}{2}$; $x=\ln 2$时, $t=\dfrac{\pi}{6}$.

原式$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\dfrac{\cos t}{\sin t}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc t-\sin t)\mathrm{d}t=\Big[\ln\left|\csc t-\cot t\right|+\cos t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(三).简化定积分的计算的若干方法

例3: 计算下列积分

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x)\cos^2 x dx =$ ________

解:

$$原式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1 - \sin^2 x)dx$$

$$= 2(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{8}$$

（2）．求$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(1+x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解: $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$为奇函数，$\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$为偶函数

$$原积分 = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2\left[\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+1$$

（3）. 求$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$

解：利用 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$

$$\text{原积分} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\frac{\sin^2 x}{1+e^x} + \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{e^x+1}) \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \frac{\pi-2}{8}$$

说明：$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+e^x}$ 的原函数难以用初等函数表达，

积分区间对称，$f(x)+f(-x)$简单易积。

例 4 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy$，求 $\int_0^1 (1-x)^2 f(x)\,dx$.

解: $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x-1)^3 \qquad f'(x)=e^{-x^2+2x}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1}_{0}-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3\,\underline{f'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}(x-1)^2 \quad (\text{令 } u=(x-1)^2)$$

$$=-\frac{1}{6}\int_1^0 u\,e^{-u+1}\,\mathrm{d}u=\frac{e}{6}\int_0^1 u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(e-2)$$

4. 与定积分有关的证明题

(一). 零点问题.

例1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，证明：方程

$$\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}=0$$ 在(a,b)内有且仅有一个根.

证明：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}$

由题设知$F(x)$ 在$[a,b]$上连续、可导，且有

$$F(a)=\int_b^a \frac{dt}{f(t)}<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$$

由介值定理（零点定理）知存在$\xi\in(a,b)$,

使$F(\xi)=0$，即: $F(x)=0$在(a,b)内至少有一个根.

又当$f(x)>0$时，

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2,$$

$F(x)$在$[a,b]$上单调增加；

故$F(x)=0$在(a,b)内有唯一的根。

例2　设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，证明$\xi\in(a,b)$

使得$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx$

证明：令$\varphi(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt\cdot\int_{b}^{x}g(t)dt$

$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$\varphi(a)=\varphi(b)=0$

利用罗尔定理　$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\varphi'(\xi)=0$

即$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx$

例3 设$f(x)$在[0，1]上可微，且有

$$f(1)=2\int_0^{1/2} e^{1-x^2} f(x)dx$$

求证：存在ξ∈(0，1)，使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

证明：令$g(x)=e^{1-x^2} f(x)$ 则$f(1)=2\int_0^{1/2} g(x)dx$

$$g(1)=f(1) \underset{\text{积分中值定理}}{=} 2g(c)(\frac{1}{2}-0)=g(c),\quad c\in[0,\frac{1}{2}]$$

则 $g(x)$ 在[c，1]上满足罗尔定理的条件

故存在ξ∈(c，1)⊂(0，1)，使$g'(\xi)=0$,

$$\text{即}[-2xe^{1-x^2} f(x)+e^{1-x^2} f'(x)]_{x=\xi}=0$$

$$\because e^{1-\xi^2}\neq 0 \qquad \therefore f'(\xi)=2\xi f(\xi)$$

例 4. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)\neq 0$,

试证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

证明: 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$

$F(x),G(x)$在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理条件

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\quad \xi\in(a,b)$$

故所证等式成立。

(二). 积分等式的证明

方法一、利用换元法、分部积分证明积分等式.

方法二、构造变上限函数，利用微分法证明积分等式.

例1 设 $f(x)$ 连续，证明 $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x [\int_0^u f(x)dx]du$

证明：令：$F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du - \int_0^x [\int_0^u f(x)dx]du$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du - \int_0^x [\int_0^u f(x)dx]du$$

$$F'(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(x)dx = 0$$

$$\therefore F(x) \equiv C, \quad \because F(0) = 0, \Rightarrow F(x) = 0.$$

(三). 积分不等式的证明

方法一、利用积分的估值、不等式性质.

例1 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数，且 $f(a)=0$, 证明：

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\ge \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx$$

证明 设 $\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|=M$

原不等式$\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx\le \dfrac{(b-a)^2}{2}M$

$\because\ f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\quad a<\xi<b$

$\therefore |f(x)|=|f'(\xi)|(x-a)\le M(x-a)$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx\le M\int_a^b (x-a)dx=M\frac{(b-a)^2}{2}$$

例2 证明$f(x)=\int_0^x(1-t)\ln(1+nt)dt$在$(0,+\infty)$上的

最大值不超过$\dfrac{n}{6}$

证明 先求最大值

$$f'(x)=(1-x)\ln(1+nx)=0\Rightarrow x=1\text{(唯一驻点)}$$

$$x>1,f'(x)<0,x<1,f'(x)>0$$

$x=1$为极大值点也为最大值点

最大值$f(1)=\int_0^1(1-t)\ln(1+nt)dt$

$$\le\int_0^1(1-t)ntdt=\frac{n}{6}$$

方法二：构造变上限函数，利用微分学的知识证明不等式是证明积分不等式的一个很重要的方法。

例1. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，试证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\ge(b-a)^2$$

证：设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}-(x-a)^2$

则 $F'(x)=f(x)\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}+\frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-2(x-a)$

$$=\int_a^x\left[\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right]\mathrm{d}t=\int_a^x\frac{[f(x)-f(t)]^2}{f(x)f(t)}\,\mathrm{d}t$$

≥ 0

$x>a,\ f(x)>0$

故 $F(x)$ 单调递增，$\therefore F(b)\ge F(a)=0$，即成立.

例2. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上有连续导数，且$f(0)=0,$

$0<f'(x)<1,$ 证明 $[\int_0^1 f(x)dx]^2>\int_0^1 f^3(x)dx.$

证明: 令：$F(t)=[\int_0^t f(x)dx]^2-\int_0^t f^3(x)dx.$

则：$F'(t)=f(t)[2\int_0^t f(x)dx-f^2(t)]$

$f'(x)>0 \quad \Rightarrow f(t)$单调增，则 $f(t)>f(0)=0$

令$G(t)=2\int_0^t f(x)dx-f^2(t)$

$G'(t)=2f(t)[1-f'(t)]>0$

$\Rightarrow G(t)$单调增，则$G(t)>G(0)=0$

$\Rightarrow F(t)$单调增，则$F(t)>F(0)=0$

则$F(1)>F(0)=0$